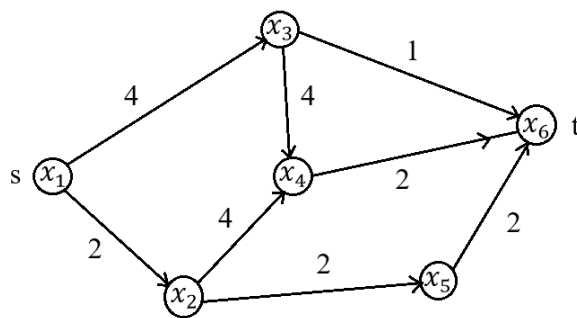


4. Giải ví dụ bằng số

Tìm luồng cực đại của đồ thị trong Hình 1. Ký hiệu V_x là tập các đỉnh có nhãn và đã xét, V_c là tập các đỉnh có nhãn nhưng chưa xét.



Hình 1

Bước lặp thứ 1

1/ **Bước khởi đầu.** Xuất phát từ luồng $z_{ij} = 0$ với mọi i, j .

2/ **Bước 1.** Gán nhãn cho x_1 là $(+x_1, \infty)$. Ta có $V_x = \emptyset, V_c = \{x_1\}$.

3/ **Bước 2.** Xét đỉnh x_1 , ta có

$$K^+(x_1) = \{x_2, x_3\}, K^-(x_1) = \emptyset.$$

Nhãn của x_2 là $(+x_1, \min\{\infty, 2 - 0\}) = (+x_1, 2)$.

Nhãn của x_3 là $(+x_1, \min\{\infty, 4 - 0\}) = (+x_1, 4)$.

Hai tập $V_x = \{x_1\}, V_c = \{x_2, x_3\}$.

4/ **Bước 2.** Chọn đỉnh x_2 chưa xét ta có

$$K^+(x_2) = \{x_4, x_5\}, K^-(x_2) = \emptyset.$$

Nhãn của x_4 là $(+x_2, \min\{2, 4 - 0\}) = (+x_2, 2)$.

Nhãn của x_5 là $(+x_2, \min\{2, 2 - 0\}) = (+x_2, 2)$.

Hai tập $V_x = \{x_1, x_2\}, V_c = \{x_3, x_4, x_5\}$.

5/ **Bước 2.** Xét đỉnh x_4 ta có

$$K^+(x_4) = \{x_6\}, K^-(x_4) = \emptyset.$$

Nhãn của x_6 là $(+x_4, \min\{2, 2 - 0\}) = (+x_4, 2)$.

Đỉnh $t = x_6$ đã được gán nhãn.

6/ **Bước 4.** Đặt $x = t$.

7/ **Bước 5.** Đỉnh $x = x_6$ có nhãn là $(+u, \sigma(x)) = (+x_4, 2)$. Tăng luồng trên cung (x_4, x_6) từ 0 lên $0 + \sigma(t) = 2$.

8/ **Bước 6.** Vì $u = x_4 \neq s$ nên đặt $x = x_4$.

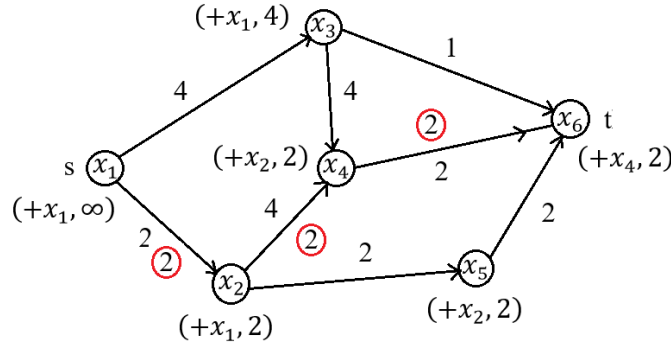
9/ **Bước 5.** Đỉnh $x = x_4$ có nhãn là $(+u, \sigma(x)) = (+x_2, 2)$. Tăng luồng trên cung (x_2, x_4) từ 0 lên $0 + \sigma(t) = 2$.

10/ **Bước 6.** Vì $u = x_2 \neq s$ nên đặt $x = x_2$.

11/ **Bước 5.** Đỉnh $x = x_2$ có nhãn là $(+u, \sigma(x)) = (+x_1, 2)$. Tăng luồng trên cung (x_1, x_2) từ 0 lên $0 + \sigma(t) = 2$.

12/ **Bước 6.** Vì $u = x_1 = s$ nên ta xóa tất cả các nhãn và quay lên Bước 1.

Kết quả của Bước lặp thứ 1 cho trong Hình 5



Hình 5

Bước lặp thứ 2.

13/ Bước 1. Gán nhãn cho x_1 là $(+x_1, \infty)$. Ta có $V_x = \emptyset, V_c = \{x_1\}$.

14/ Bước 2. Xét đỉnh x_1 , ta có

$$K^+(x_1) = \{x_3\}, K^-(x_1) = \emptyset.$$

Nhãn của x_3 là $(+x_1, \min\{\infty, 4 - 0\}) = (+x_1, 4)$.

Hai tập $V_x = \{x_1\}, V_c = \{x_3\}$.

15/ Bước 2. Xét đỉnh x_3 ta có

$$K^+(x_3) = \{x_4, x_6\}, K^-(x_3) = \emptyset.$$

Nhãn của x_6 là $(+x_3, \min\{4, 1 - 0\}) = (+x_3, 1)$.

Đỉnh $t = x_6$ đã được gán nhãn.

16/ Bước 4. Đặt $x = t$.

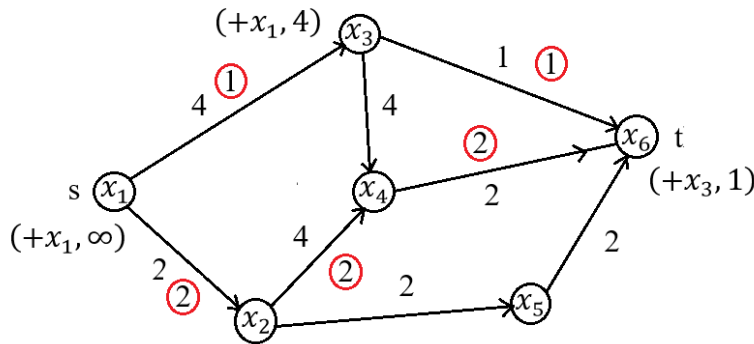
17/ Bước 5. Đỉnh $x = x_6$ có nhãn là $(+u, \sigma(x)) = (+x_3, 1)$. Tăng luồng trên cung (x_3, x_6) từ 0 lên $0 + \sigma(t) = 1$.

18/ Bước 6. Vì $u = x_3 \neq s$ nên đặt $x = x_3$.

19/ Bước 5. Đỉnh $x = x_3$ có nhãn là $(+u, \sigma(x)) = (+x_1, 4)$. Tăng luồng trên cung (x_1, x_3) từ 0 lên $0 + \sigma(t) = 1$.

20/ Bước 6. Vì $u = x_1 = s$ nên ta xóa tất cả các nhãn và quay lên Bước 1.

Kết quả của Bước lặp thứ 2 cho trong Hình 6



Hình 6

Bước lặp thứ 3.

21/ Bước 1. Gán nhãn cho x_1 là $(+x_1, \infty)$. Ta có $V_x = \emptyset, V_c = \{x_1\}$.

22/ Bước 2. Xét đỉnh x_1 , ta có

$$K^+(x_1) = \{x_3\}, K^-(x_1) = \emptyset.$$

Nhãn của x_3 là $(+x_1, \min\{\infty, 4 - 1\}) = (+x_1, 3)$.

Hai tập $V_x = \{x_1\}, V_c = \{x_3\}$.

23/ Bước 2. Xét đỉnh x_3 ta có

$$K^+(x_3) = \{x_4\}, K^-(x_3) = \emptyset.$$

Nhãn của x_4 là $(+x_3, \min\{3, 4 - 0\}) = (+x_3, 3)$.

Hai tập $V_x = \{x_1, x_3\}, V_c = \{x_4\}$.

24/ Bước 2. Xét đỉnh x_4 ta có

$$K^+(x_4) = \emptyset, K^-(x_4) = \{x_2\}.$$

Nhãn của x_2 là $(-x_4, \min\{3, 2\}) = (-x_4, 2)$.

Hai tập $V_x = \{x_1, x_3, x_4\}, V_c = \{x_2\}$.

25/ Bước 2. Xét đỉnh x_2 ta có

$$K^+(x_2) = \{x_5\}, K^-(x_2) = \emptyset.$$

Nhãn của x_5 là $(+x_2, \min\{2, 2 - 0\}) = (+x_2, 2)$.

Hai tập $V_x = \{x_1, x_3, x_4, x_2\}, V_c = \{x_5\}$.

26/ Bước 2. Xét đỉnh x_5 ta có

$$K^+(x_5) = \{x_6\}, K^-(x_5) = \emptyset.$$

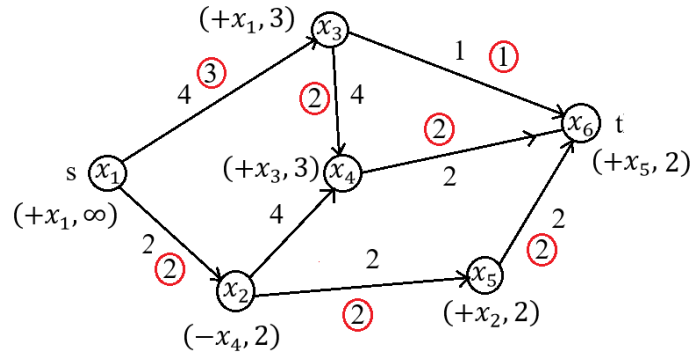
Nhãn của x_6 là $(+x_5, 2)$.

Đỉnh $t = x_6$ đã được gán nhãn.

Dùng Bước 4, Bước 5 và Bước 6 ta tìm được đường đi tăng luồng là

$$x_1 \longrightarrow x_3 \longrightarrow x_4 \xleftarrow{\text{red}} x_2 \longrightarrow x_5 \longrightarrow x_6$$

Trên các cung thuận ta tăng vận chuyển lên một lượng là $\sigma(t) = 2$, trên cung ngược lại ta giảm vận chuyển đi một lượng là $\sigma(t)$. Kết quả ta nhận được luồng trong Hình 7



Hình 7

Bước lặp thứ 4.

27/ Bước 1. Gán nhãn cho x_1 là $(+x_1, \infty)$. Ta có $V_x = \emptyset, V_c = \{x_1\}$.

28/ Bước 2. Xét đỉnh x_1 , ta có

$$K^+(x_1) = \{x_3\}, K^-(x_1) = \emptyset.$$

Nhãn của x_3 là $(+x_1, \min\{\infty, 4 - 3\}) = (+x_1, 1)$.

Hai tập $V_x = \{x_1\}, V_c = \{x_3\}$.

29/ Bước 2. Xét đỉnh x_3 ta có

$$K^+(x_3) = \{x_4\}, K^-(x_3) = \emptyset.$$

Nhãn của x_4 là $(+x_3, \min\{1, 4 - 2\}) = (+x_3, 1)$.

Hai tập $V_x = \{x_1, x_3\}, V_c = \{x_4\}$.

30/ Bước 2. Xét đỉnh x_4 ta có

$$K^+(x_4) = \emptyset, K^-(x_4) = \emptyset.$$

Đến đây ta không thể đánh nhãn tiếp tục được nữa, đỉnh $t = x_6$ không thể gán nhãn được nữa. Vậy luồng ở Hình 7 là luồng cực đại với giá trị của luồng là 5. Lát cắt hẹp nhất (X_0, Y_0) có

$$X_0 = \{x_1, x_3, x_4\}, \quad Y_0 = \{x_2, x_5, x_6\}.$$